ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ *JONES* ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΑΥΤΟΥ ΣΤΟΝ ΣΤΕΡΕΟ ΤΟΡΟ

Χρονόπουλος Αναστάσιος

ΕΜΠ

16 Απριλίου 2008

Περιεχόμενα

Ιστορική Αναδρομή

Ανοιχτό πρόβλημα στην Θεωρία Κόμβων

- Ενα ανοιχτό μεχρι σήμερα πρόβλημα των μαθηματικών είναι η ταξινόμιση των κόμβων.
- Το 1983 ο *Jones* ....
- Απο το 1983 και έπιτα, υπήρχε μια εντονη δραστιριότιτα με αξιοσημείοτα αποτελέσματα γύρο από την επίλυση αυτού του προβλήματος.

Ιστορική Αναδρομή

Ανοιχτό πρόβλημα στην Θεωρία Κόμβων

- Ενα ανοιχτό μεχρι σήμερα πρόβλημα των μαθηματικών είναι η ταξινόμιση των κόμβων.
- Το 1983 ο *Jones* ....
- Απο το 1983 και έπιτα, υπήρχε μια εντονη δραστιριότιτα με αξιοσημείοτα αποτελέσματα γύρο από την επίλυση αυτού του προβλήματος.

Ιστορική Αναδρομή

Ανοιχτό πρόβλημα στην Θεωρία Κόμβων

- Ενα ανοιχτό μεχρι σήμερα πρόβλημα των μαθηματικών είναι η ταξινόμιση των κόμβων.
- Το 1983 ο *Jones* ....
- Απο το 1983 και έπιτα, υπήρχε μια εντονη δραστιριότιτα με αξιοσημείοτα αποτελέσματα γύρο από την επίλυση αυτού του προβλήματος.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λείος κόμβος ονομάζεται η εικόνα του κύκλου στο R^3 κάτω από μια απείρως διαφορίσιμη εμφύτευση με μη μηδενικά διαφορικά:

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \neq (0,0,0).$$

Ουσιαστικά κόμβος είναι κάθε κλειστή μη-αυτοτεμνόμενη καμπύλη του Ευκλείδιου χώρου R^3 και κρίκος είναι ένα σύνολο από (λείες) κλειστές μη αυτοτεμνόμενες καμπύλες του R^3, οι οποίες μπορεί να μπλέκονται και μεταξύ τους.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λείος κόμβος ονομάζεται η εικόνα του κύκλου στο R^3 κάτω από μια απείρως διαφορίσιμη εμφύτευση με μη μηδενικά διαφορικά:

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \neq (0,0,0).$$

Ουσιαστικά κόμβος είναι κάθε κλειστή μη-αυτοτεμνόμενη καμπύλη του Ευκλείδιου χώρου R^3 και κρίκος είναι ένα σύνολο από (λείες) κλειστές μη αυτοτεμνόμενες καμπύλες του R^3, οι οποίες μπορεί να μπλέκονται και μεταξύ τους.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Για την μελέτη των κόμβων είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την κάθετη προβολή τους σ' ένα επίπεδο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο λείοι κόμβοι K_0 και K_1 ονομάζονται *ισοδύναμοι ή ισοτοπικοί* αν υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια αμφιδιαφορίσιμων απεικονίσεων, $f_t : R^3 \to R^3$, $t \in [0,1]$, λείως εξαρτώμενη από την παράμετρο t, $f_t : R^3 \to R^3$, $t \in [0,1]$, που αντιστοιχεί τον κόμβο K_0 στον κόμβο K_1 δηλαδή τέτοια ώστε f_0 να είναι η ταυτοτική στον K_0 και $f_1(K_0) = K_1$ (λείως εξαρτώμενη σημαίνει ότι η απεικόνιση $\mathcal{F} : R^3 \times [0,1] \to R^3$ που δίνεται από το $(x,t) \longmapsto f_t(x)$ είναι διαφορίσιμη). Η οικογένεια των αμφιδιαφορίσιμων f_t λέμε ότι είναι μία ισοτοπία των κόμβων K_0 και K_1.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Για την μελέτη των κόμβων είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την κάθετη προβολή τους σ' ένα επίπεδο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο λείοι κόμβοι K_0 και K_1 ονομάζονται ***ισοδύναμοι ή ισοτοπικοί*** αν υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια αμφιδιαφορίσιμων απεικονίσεων, $f_t : R^3 \to R^3, \quad t \in [0,1]$, λείως εξαρτώμενη από την παράμετρο t, $f_t : R^3 \to R^3, \quad t \in [0,1]$, που αντιστοιχεί τον κόμβο K_0 στον κόμβο K_1 δηλαδή τέτοια ώστε f_0 να είναι η ταυτοτική στον K_0 και $f_1(K_0) = K_1$ (λείως εξαρτώμενη σημαίνει ότι η απεικόνιση $\mathcal{F} : R^3 \times [0,1] \to R^3$ που δίνεται από το $(x,t) \longmapsto f_t(x)$ είναι διαφορίσιμη). Η οικογένεια των αμφιδιαφορίσιμων f_t λέμε ότι είναι μία ισοτοπία των κόμβων K_0 και K_1.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Τίθεται τώρα το Ακόλουθο ερώτημα:

Πότε δύο κόμβοι είναι διαφορετικοί (δηλ. μη ισοτοπικοί) και με ποιά διαδικασία πέραν της γραφικής, μπορούμε να το συμπεράνουμε ;
Ας σημειωθεί ότι η γραφική διαδικασία είναι η πλέον δίσχρηστη και ακατάληλη. (π.χ. ...).

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Τίθεται τώρα το Ακόλουθο ερώτημα:

Πότε δύο κόμβοι είναι διαφορετικοί (δηλ. μη ισοτοπικοί) και με ποιά διαδικασία πέραν της γραφικής, μπορούμε να το συμπεράνουμε ;

Ας σημειωθεί ότι η γραφική διαδικασία είναι η πλέον δίσχρηστη και ακατάληλη. (π.χ. ...).

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Τίθεται τώρα το Ακόλουθο ερώτημα:

Πότε δύο κόμβοι είναι διαφορετικοί (δηλ. μη ισοτοπικοί) και με ποιά διαδικασία πέραν της γραφικής, μπορούμε να το συμπεράνουμε ;
Ας σημειωθεί ότι η γραφική διαδικασία είναι η πλέον δίσχρηστη και ακατάληλη. (π.χ. ...).

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Ετσι, έγιναν προσπάθειες για την μελέτη των κόμβων μέσω της Άλγεβρας και πιό συγκεκριμένα μέσο της θεωρίας των κοτσίδων (Θεώρημα *Alexander*).

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Alexander 1923) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος), μπορεί να ισοτοπηθεί στο κλείσιμο μιας κοτσίδας.

- Προς αυτή την κατεύθυνση, σημαντική ήταν η συμβολή του *A.A.Markov*, μέσο του ομόνημου Θεωρήματος που έχει ως εξής:

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Ετσι, έγιναν προσπάθειες για την μελέτη των κόμβων μέσω της Άλγεβρας και πιό συγκεκριμένα μέσο της θεωρίας των κοτσίδων (Θεώρημα *Alexander*).

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Alexander 1923) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος), μπορεί να ισοτοπηθεί στο κλείσιμο μιας κοτσίδας.

- Προς αυτή την κατεύθυνση, σημαντική ήταν η συμβολή του *A.A.Markov*, μέσο του ομόνημου Θεωρήματος που έχει ως εξής:

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Ετσι, έγιναν προσπάθειες για την μελέτη των κόμβων μέσω της Άλγεβρας και πιό συγκεκριμένα μέσο της θεωρίας των κοτσίδων (Θεώρημα *Alexander*).

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Alexander 1923) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος), μπορεί να ισοτοπηθεί στο κλείσιμο μιας κοτσίδας.

- Προς αυτή την κατέυθυνση, σημαντική ήταν η συμβολή του *A.A.Markov*, μέσο του ομόνημου Θεωρήματος που έχει ως εξής:

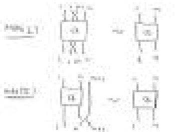
Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Markov, 1935) Δύο κοτσίδες $\alpha \in B_n$ και $\beta \in B_m$ έχουν ισοτοπικά κλεισίματα, αν και μόνο αν υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία από κινήσεις:
•τύπου **I:** $B_n \ni \alpha \sim \sigma_i \alpha \sigma_i^{-1} \in B_n$, $\forall \sigma_i \in B_n$ και
•τύπου **II:** $B_n \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$,
που οδηγούν την α στη β.

- Αυτές οι συνθήκες έχουν μείνει με τον όρο "κινήσεις *Markov*".



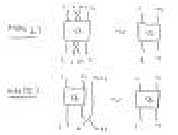
Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Markov, 1935) Δύο κοτσίδες $\alpha \in B_n$ και $\beta \in B_m$ έχουν ισοτοπικά κλεισίματα, αν και μόνο αν υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία από κινήσεις:
•τύπου **I:** $B_n \ni \alpha \sim \sigma_i \alpha \sigma_i^{-1} \in B_n$, $\forall \sigma_i \in B_n$ και
•τύπου **II:** $B_n \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$,
που οδηγούν την α στη β.

- Αυτές οι συνθήκες έχουν μείνει με τον όρο "κινήσεις *Markov*".



Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Ακολούθως δίνουμε την πρώτη επιτυχή κατασκευή αναλλοίωτης κόμβων με εφαρμογή του Θεωρήματος *Markov*, που έγινε από τον *V.F.R. Jones* το 1984, χάριν της οποίας τιμήθηκε το 1985 με το βραβείο *Fields*.

ΟΡΙΣΜΟΣ

(Πολυώνυμο Jones 2–μεταβλητών) Η αναλλοίωτη δύο μεταβλητών $X_L(q,\lambda)$ ενός προσανατολισμένου κόμβου L είναι η συνάρτηση,

$$X_L(q,\lambda) = \left(-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)}\right)^{n-1} \left(\sqrt{\lambda}\right)^{e} tr(\pi(\alpha))$$

όπου $\alpha \in B_n$ είναι οποιαδήποτε κοτσίδα τ.ώ. $\widehat{\alpha} = L$, e είναι το εκθετικό άθροισμα του α ως λέξη των σ_i και $\pi \ : \ \sigma_i \longmapsto g_i$ η αναπαράσταση της B_n στην $H(q,n)$.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Ακολούθως δίνουμε την πρώτη επιτυχή κατασκευή αναλλοίωτης κόμβων με εφαρμογή του Θεωρήματος *Markov*, που έγινε από τον *V.F.R. Jones* το 1984, χάριν της οποίας τιμήθηκε το 1985 με το βραβείο *Fields*.

ΟΡΙΣΜΟΣ

(Πολυώνυμο Jones 2–μεταβλητών) Η αναλλοίωτη δύο μεταβλητών $X_L(q,\lambda)$ ενός προσανατολισμένου κόμβου L είναι η συνάρτηση,

$$X_L(q,\lambda) = \left(-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)}\right)^{n-1} \left(\sqrt{\lambda}\right)^{e} tr(\pi(\alpha))$$

όπου $\alpha \in B_n$ είναι οποιαδήποτε κοτσίδα τ.ώ. $\widehat{\alpha} = L$, e είναι το εκθετικό άθροισμα του α ως λέξη των σ_i και $\pi : \sigma_i \longmapsto g_i$ η αναπαράσταση της B_n στην $H(q,n)$.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

Ας σημειωθεί ότι με *tr* συμβολίζουμε την συνάρτηση ίχνους του *Ocneanu* η οποία ικανοποιεί το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ocneanu, 1984) Γιά κάθε $z \in C$ υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $tr : \cup_{n=1}^{\infty} H(q,n) \longrightarrow C$ μοναδικά ορισμένη από τους κανόνες:

1) $tr(ab) = tr(ba)$, $\forall a, b \in H(q,n)$

2) $tr(1) = 1$,

3) $tr(xg_n) = z\, tr(x)$, $\forall x \in H(q,n)$.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

Ας σημειωθεί ότι με *tr* συμβολίζουμε την συνάρτηση ίχνους του *Ocneanu* η οποία ικανοποιεί το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ocneanu, 1984) Γιά κάθε $z \in C$ υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $tr : \cup_{n=1}^{\infty} H(q,n) \longrightarrow C$ μοναδικά ορισμένη από τους κανόνες:

1) $tr(ab) = tr(ba)$, $\forall a, b \in H(q,n)$

2) $tr(1) = 1$,

3) $tr(xg_n) = z\ tr(x)$, $\forall x \in H(q,n)$.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Θυμίζουμε ότι με $H(q,n)$ συμβολίζουμε την άλγεβρα *Hecke* τύπου $\mathcal{A}$, που έχει την ακόλουθη παράσταση:

$$H(q,n) = \left\langle g_1, g_2, \ldots, g_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i^2 = (q-1)g_i + q1, \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ g_i g_j = g_j g_i \;,\; |i-j| \geq 2. \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

όπου $q \in C$, μη μηδενικό και $n \in N$.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Θυμίζουμε ότι με $H(q,n)$ συμβολίζουμε την άλγεβρα *Hecke* τύπου $\mathcal{A}$, που έχει την ακόλουθη παράσταση:

$$H(q,n) = \left\langle g_1, g_2, \ldots, g_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i^2 = (q-1)g_i + q1, \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ g_i g_j = g_j g_i \ , \ |i-j| \geq 2. \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

όπου $q \in C$, μη μηδενικό και $n \in N$.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Η άλγεβρα *Hecke* $H(q, n)$, έχει τον χαρακτιρισμό τύπου $\mathcal{A}$, λόγο της άμεσης σχέσης της με το γράφημα *Coxeter* τύπου $\mathcal{A}$.
- Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μιά ομάδα $\mathcal{C}$ που έχει παράσταση της μορφής

$$\langle s_1, \ldots, s_n | (s_i s_j)^{m_{ij}} \; = \; 1 \; , \; m_{ii} = 1 \; , \; i = 1, \ldots, n \rangle$$

ονομάζεται ομάδα *Coxeter*, όπου με m_{ij} συμβολίζουμε το $m(s_i, s_j)$.

- Όλες οι πεπερασμένες ομάδες *Coxeter* έχουν ταξινομηθεί. Κάθε τέτοια ομάδα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφημα *Coxeter* (βλέπε σχήμα).

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Η άλγεβρα *Hecke* $H(q,n)$, έχει τον χαρακτιρισμό τύπου $\mathcal{A}$, λόγο της άμεσης σχέσης της με το γράφημα *Coxeter* τύπου $\mathcal{A}$.
- Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μιά ομάδα C που έχει παράσταση της μορφής

$$\langle s_1,\ldots,s_n | (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \ , \ m_{ii} = 1 \ , \ i = 1,\ldots,n \rangle$$

ονομάζεται ομάδα *Coxeter*, όπου με m_{ij} συμβολίζουμε το $m(s_i,s_j)$.

- Όλες οι πεπερασμένες ομάδες *Coxeter* έχουν ταξινομηθεί. Κάθε τέτοια ομάδα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφημα *Coxeter* (βλέπε σχήμα).

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Η άλγεβρα *Hecke* $H(q,n)$, έχει τον χαρακτιρισμό τύπου $\mathcal{A}$, λόγο της άμεσης σχέσης της με το γράφημα *Coxeter* τύπου $\mathcal{A}$.
- Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μιά ομάδα $\mathcal{C}$ που έχει παράσταση της μορφής

$$\langle s_1, \ldots, s_n | (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \ , \ m_{ii} = 1 \ , \ i = 1, \ldots, n \rangle$$

ονομάζεται ομάδα *Coxeter*, όπου με m_{ij} συμβολίζουμε το $m(s_i, s_j)$.

- Όλες οι πεπερασμένες ομάδες *Coxeter* έχουν ταξινομηθεί. Κάθε τέτοια ομάδα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφημα *Coxeter* (βλέπε σχήμα).

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Η άλγεβρα *Hecke* $H(q, n)$, έχει τον χαρακτιρισμό τύπου $\mathcal{A}$, λόγο της άμεσης σχέσης της με το γράφημα *Coxeter* τύπου $\mathcal{A}$.
- Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μιά ομάδα $\mathcal{C}$ που έχει παράσταση της μορφής

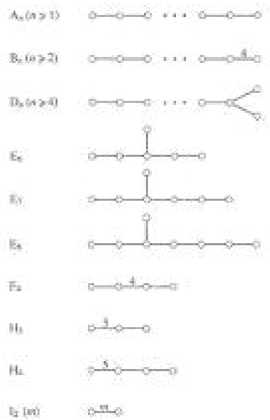
$$\langle s_1, \ldots, s_n | (s_i s_j)^{m_{ij}} \;=\; 1 \;,\; m_{ii} = 1 \;,\; i = 1, \ldots, n \rangle$$

ονομάζεται ομάδα *Coxeter*, όπου με m_{ij} συμβολίζουμε το $m(s_i, s_j)$.

- Όλες οι πεπερασμένες ομάδες *Coxeter* έχουν ταξινομηθεί. Κάθε τέτοια ομάδα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφημα *Coxeter* (βλέπε σχήμα).

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων



Σχήμα: Οι πεπερασμένες ομάδες *Coxeter*.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Στο άρθρο [*Jon*] ο *Jones*, ρωτά εάν υπάρχουν ανάλογες κατασκευές για διαφορετικούς τύπους ομάδων *Coxeter*.
- Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε πρώτα από την Σ.Λαμπροπούλου το 1994 (βλέπε [*Lam*] και τις αναφορές εκεί), συνδέοντας τις άλγεβρες *Hecke* και τις κυκλοτομικές άλγεβρες *Hecke* τύπου B καθώς και τις αφφινικές άλγεβρες *Hecke* τύπου A με την θεωρία κόμβων μέσα στον τόρο. Στη συνέχεια κατασκεύασε ίχνη *Markov* και όλα τα δυνατά ανάλογα του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών για τον τόρο.
- Κατασκευή ιχνών *Markov* έχει γίνει και για την σειρά D_n από τον *M.Geck*.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Στο άρθρο [*Jon*] ο *Jones*, ρωτά εάν υπάρχουν ανάλογες κατασκευές για διαφορετικούς τύπους ομάδων *Coxeter*.
- Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε πρώτα από την Σ.Λαμπροπούλου το 1994 (βλέπε [*Lam*] και τις αναφορές εκεί), συνδέοντας τις άλγεβρες *Hecke* και τις κυκλοτομικές άλγεβρες *Hecke* τύπου B καθώς και τις αφφινικές άλγεβρες *Hecke* τύπου A με την θεωρία κόμβων μέσα στον τόρο. Στη συνέχεια κατασκεύασε ίχνη *Markov* και όλα τα δυνατά ανάλογα του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών για τον τόρο.
- Κατασκευή ιχνών *Markov* έχει γίνει και για την σειρά D_n από τον *M.Geck*.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Στο άρθρο [*Jon*] ο *Jones*, ρωτά εάν υπάρχουν ανάλογες κατασκευές για διαφορετικούς τύπους ομάδων *Coxeter*.
- Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε πρώτα από την Σ.Λαμπροπούλου το 1994 (βλέπε [*Lam*] και τις αναφορές εκεί), συνδέοντας τις άλγεβρες *Hecke* και τις κυκλοτομικές άλγεβρες *Hecke* τύπου B καθώς και τις αφφινικές άλγεβρες *Hecke* τύπου A με την θεωρία κόμβων μέσα στον τόρο. Στη συνέχεια κατασκεύασε ίχνη *Markov* και όλα τα δυνατά ανάλογα του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών για τον τόρο.
- Κατασκευή ιχνών *Markov* έχει γίνει και για την σειρά D_n από τον *M.Geck*.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Έτσι έχουν εξεταστεί όλες οι δυνατές περιπτώσεις (τρείς το πλήθος) ύπαρξης ανάλογων κατασκευών, για τους διάφορους τύπους των γραφημάτων *Coxeter*.
- Στόχος της εργασίας αυτής είναι η παρουσίαση της κατασκευής που χρησημοποιεί το γράφημα *Coxeter* τύπου $\mathcal{B}$.
- Για την περίπτωση τύπου $\mathcal{D}$ ακολουθείται η ίδια στρατηγική με ανάλλογες για την περίπτωση τροποποιήσεις.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Έτσι έχουν εξεταστεί όλες οι δυνατές περιπτώσεις (τρείς το πλήθος) ύπαρξης ανάλογων κατασκευών, για τους διάφορους τύπους των γραφημάτων *Coxeter*.
- **Στόχος της εργασίας αυτής είναι η παρουσίαση της κατασκευής που χρησημοποιεί το γράφημα *Coxeter* τύπου $\mathcal{B}$.**
- Για την περίπτωση τύπου $\mathcal{D}$ ακολουθείται η ίδια στρατηγική με ανάλλογες για την περίπτωση τροποποιήσεις.

Ιστορική Αναδρομή

Περι Κόμβων

- Έτσι έχουν εξεταστεί όλες οι δυνατές περιπτώσεις (τρείς το πλήθος) ύπαρξης ανάλογων κατασκευών, για τους διάφορους τύπους των γραφημάτων *Coxeter*.
- **Στόχος της εργασίας αυτής είναι η παρουσίαση της κατασκευής που χρησημοποιεί το γράφημα *Coxeter* τύπου $\mathcal{B}$.**
- Για την περίπτωση τύπου $\mathcal{D}$ ακολουθείται η ίδια στρατηγική με ανάλλογες για την περίπτωση τροποποιήσεις.

Η Ομάδα των Κοτσίδων τύπου B

Η Ομάδα των Κοτσίδων

- Έστω μια κοτσίδα με $n+1$ κλωστές. Αν απαιτήσουμε η πρώτη κλωστή να είναι ταυτοτική (δηλ. τα άκρα της να είναι τα πρώτα κατα την διάταξή τους πάνω στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2), τότε δημιουργίτε μια ειδική υποομάδα της ομάδας των κοτσίδων B_{n+1}, η λεγόμενη ομάδα των *κοτσίδων Artin τύπου B* που θα συμβολίζεται ως $B_{1,n}$.
- Από την θεωρία παραστάσεων προκύπτει ότι η $B_{1,n}$ έχει την ακόλουθη παράσταση:

$$B_{1,n} = \left\langle \; T, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & , \forall i \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & , |i-j| > 1 \\ T\sigma_i = \sigma_i T & , i > 1 \\ T\sigma_1 T\sigma_1 = \sigma_1 T \sigma_1 T & \end{array} \right\rangle$$

Η Ομάδα των Κοτσίδων τύπου B

Η Ομάδα των Κοτσίδων

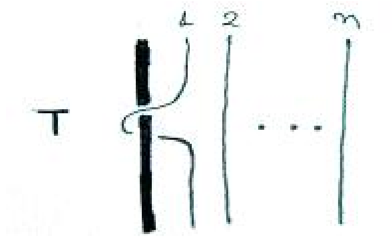
- Έστω μια κοτσίδα με $n+1$ κλωστές. Αν απαιτήσουμε η πρώτη κλωστή να είναι ταυτοτική (δηλ. τα άκρα της να είναι τα πρώτα κατα την διάταξή τους πάνω στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2), τότε δημιουργίτε μια ειδική υποομάδα της ομάδας των κοτσίδων B_{n+1}, η λεγόμενη ομάδα των *κοτσίδων Artin τύπου B* που θα συμβολίζεται ως $B_{1,n}$.
- Από την θεωρία παραστάσεων προκύπτει ότι η $B_{1,n}$ έχει την ακόλουθη παράσταση:

$$B_{1,n} = \left\langle \; T, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \; \middle| \; \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad , \forall i \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad , \; |i-j| > 1 \\ T\sigma_i = \sigma_i T \quad , \; i > 1 \\ T\sigma_1 T\sigma_1 = \sigma_1 T \sigma_1 T \end{array} \right\rangle$$

Η Ομάδα των Κοτσίδων τύπου B

Η Ομάδα των Κοτσίδων

- Το σύνολο λοιπόν των κοτσίδων $B_{1,n}$, $n \in N$ αποτελεί ομάδα, με πράξη την παράθεση-σύνθεση(όπως στην ομάδα B_n) και γεννήτορες τους συνιθισμένους γεννήτορες $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, για το κλασικό μέρος, μαζί με τον γεννήτορα T.

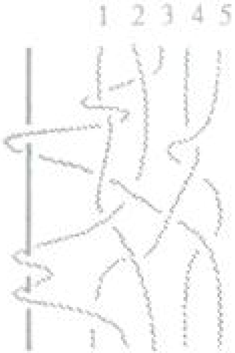


Σχήμα: Ο γενήτορας T της ομάδας $B_{1,n}$.

Η Ομάδα των Κοτσίδων τύπου B

Η Ομάδα των Κοτσίδων

- Μια τυχαία κοτσίδα *Artin* τύπου B έχει την ακόλουθη μορφή:



Σχήμα: Μια κοτσίδα *Artin* τύπου B.

Ένα Ίχνος *Markov* για Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

- Κάθε ομάδα *Coxeter* (που αντιστοιχεί σε ένα από τα τρεία πρώτα γραφήματα) σχετίζεται με μια άλγεβρα *Hecke* $\mathcal{H}$ (συνήθως πάνω στο σώμα C), η παράσταση της οποίας προκύπτει από την παράσταση της ομάδας *Coxeter* αντικαθιστώντας την τετραγωνική σχέση $\sigma_i^2 = 1$ από την τετραγωνική σχέση $\sigma_i^2 = (q_i - 1) \cdot \sigma_i + q_i \cdot 1$, όπου το $q_i \neq 0 \in C$, είναι μια σταθερή μεταβλιτή και βάζοντας όπου $\sigma_i \mapsto g_i$, με $i = 1, \ldots, n-1$ και $g_0 = t$ για την τύπου $\mathcal{B}$ και επιπλέον $g_{-1} = d$ για την τύπου $\mathcal{D}$.
- Για παράδειγμα, η άλγεβρα *Hecke* τύπου $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}_n(q)$, σχετίζεται με την συμμετρική ομάδα S_n.

Ένα Ίχνος *Markov* για Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

- Κάθε ομάδα *Coxeter* (που αντιστοιχεί σε ένα από τα τρεία πρώτα γραφήματα) σχετίζεται με μια άλγεβρα *Hecke* $\mathcal{H}$ (συνήθως πάνω στο σώμα C), η παράσταση της οποίας προκύπτει από την παράσταση της ομάδας *Coxeter* αντικαθιστώντας την τετραγωνική σχέση $\sigma_i^2 = 1$ από την τετραγωνική σχέση $\sigma_i^2 = (q_i - 1) \cdot \sigma_i + q_i \cdot 1$, όπου το $q_i \neq 0 \in C$, είναι μια σταθερή μεταβλιτή και βάζοντας όπου $\sigma_i \mapsto g_i$, με $i = 1, \ldots, n-1$ και $g_0 = t$ για την τύπου $\mathcal{B}$ και επιπλέον $g_{-1} = d$ για την τύπου $\mathcal{D}$.
- Για παράδειγμα, η άλγεβρα *Hecke* τύπου $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}_n(q)$, σχετίζεται με την συμμετρική ομάδα S_n.

Ένα Ίχνος *Markov* για Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

Ένα Ίχνος *Markov* για Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

-

Ένα Ίχνος *Markov* για Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

Άλγεβρες *Hecke* τύπου B

Κόμβοι στον Στερεό Τόρο

......

Κόμβοι στον Στερεό Τόρο

......

-
-